EX 15 :

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$; $x\in[-2,2]$

1.*a*) *la fonction* : $x\to 4-x^2$ *est continue et positive sur* $[-2,2]$ *d'où f est continue sur* $[-2,2]$

par suit f admet au moins une primitive sur $[-2,2]$

b)

$\begin{cases}F'(x)=f(x)\\F(0)=0\end{cases}$

$\forall x\in D_F=[-2,2]\,;(-x)\in D_F$

$f(x)=f(-x)\Rightarrow$

$F(x)=-F(-x)+k$

$F(0)=0\Rightarrow k=0$

d'où $F(-x)=-F(x)$

F est impaire.

2. $G(x)=F(2Cos\ x)\,;x\in[0,\pi]$

$\Rightarrow -\pi\le -x\le 0$

$\Rightarrow 0\le \pi-x\le \pi$

$\Rightarrow(\pi-x)\in D_G$

$G(\pi-x)=F(2Cos(\pi-x)$

$=F(-2Cos\ x)$

$=-F(2Cos\ x)$

$=-G(x)$

conclusion : $I(\frac{\pi}{2},0)$ *est un centre de symétrie pour la courbe de f*

b) $G'(x)=-2\sin x.F'(2Cos\ x)$

$=-2\sin x\ f(2Cos\ x)$

$=-2\sin x\sqrt{4(1-Cos^2x)}$

$=-2\sin x\sqrt{4\sin^2x}$

$=-4\sin x.|\sin x|$

$G'(x)=-4\sin^2x$ (*car* $\sin x\ge 0$)

$G'(x)=-2(1-Cos\ 2x)$

d'où $G(x)=-2(x-\frac{1}{2}\sin 2x)+k$

$G(\frac{\pi}{2})=F(0)=0$

$\Rightarrow -2(\frac{\pi}{2}-0)+k=0$

$\Rightarrow k=\pi$

d'où

$G(x)=-2x+\sin 2x+\pi$

$\forall x\in[0,\pi]$

c) $F(1)=F(2\cos(\frac{\pi}{3}))$

$=G(\frac{\pi}{3})=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F(2)=F(2\cos(0))$

$=G(0)=\pi$

$F(\sqrt{2})=F(2Cos\frac{\pi}{4})$

$=G(\frac{\pi}{4})=1+\frac{\pi}{2}$

EX 16 :

$u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

1. $u'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$u'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$u'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}$

d'où

$\sqrt{1+x^2}=\frac{u(x)}{u'(x)}$